

1.はじめに

サスペンション膜構造などで主材料として使用している膜材は、複雑な曲面となる場合が多く、通常簡単な数式で表すことはできない。荷重に対してこの複雑な曲面を解析的に解を得ようとしても困難であり、通常は有限要素法による数値解析となる。膜材料曲面を手計算で解く方法は、簡単な曲面の場合に限られ、例えば骨組膜構造では全体形態の中で部分的な計算となる。荷重条件も簡単なものとなるので、構造設計に使う応力計算式は精度だけでなく、安全側の計算値となるようにしなければならない。

本論文では骨組膜構造の屋根面におけるサグなし平面膜材に限定して、設計で使用している応力計算式について、有限要素法による数値解析との結果と比較することによって、設計式の妥当性及び精度を検討する。応力算出の設計式については、最も簡略化されて現行の計算式のほか、より高い精度を求めて二次関数の代わりに三角関数を用いた計算式についても比較し、対象としている膜面の支持条件や形状の違いによる影響を検討する。

2.既存の設計式

文献3による設計式を式(1)に示す。定着間距離であるスパン l は膜材の短辺方向寸法で、通常膜材の縦糸方向となる。計算式は一方向応力で簡略化し、分布荷重 W に対して、短辺方向(縦糸方向)の応力のみ外力を抵抗する。式の中の C は風力係数、 q は速度圧、 l は膜の短辺固定端間の距離、 E_t は膜材料の縦糸方向の引張剛性、 T_0 は初期張力である。つまり、膜材が荷重 W を受けて、中央の変位が δ となったとき、理論上では一様となる膜張力 T はこの式で算出される。

$$\begin{aligned} \text{(荷重)} W &= C \times q \quad \text{(水平力)} H = \frac{W \cdot l^2}{8\delta} \\ \text{(垂直)} V &= \frac{W \cdot l}{2} \quad \text{(応力)} T = \sqrt{V^2 + H^2} + T_0 \end{aligned} \quad (1)$$

「膜構造の建築物・膜材料等の技術基準及び同解説」で用いられている δ の解としては、二次関数を用いた理論解を提示しており、式(2)で示されている。

$$\text{(変位)} \delta = \sqrt[3]{\frac{3 \times W \times l^4}{64 \times E_t}} \quad (2)$$

文献1は三角関数を用いた場合の理論解析を展開しており、その結果を式(3)に示す。

$$\text{(変位)} \delta = \sqrt[3]{\frac{16 \times W \times l^4}{\pi^5 \times E_t}} \quad (3)$$

三角関数を用いるリッツの方法による δ の解は二次関数を用いて求めた解より4%ほど大きいものになる。

3.数値解析

膜応力の計算式の精度などの検討するため、有限要素法による数値解析を行う。膜材料面の応力・変形について、材料の異方性に起因する解析上の複雑さだけではなく、サグなしの場合は非常に強い非線形性を有する構造体となるため、幾何学的非線形性を考慮した大変形解析が必要となる。本論文では最も簡単な三角形要素分割に限定して、膜材のヤング係数による弾性剛性、膜張力による幾何剛性および大変形による非線形方程式に基づく解析理論を用いる。大変形による非線形性に対して、式(4)に示すひずみと変位の非線形関係式で対処する。 ϵ と γ は膜材のひずみ、 u, v, w はそれぞれ $x \sim z$ 方向の変位を示す。

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (4)$$

異方性材料の場合でも応力とひずみの関係は従来の $\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\}$ で表すことができるが、応力ひずみマトリックス $[D]$ は式(5)になる。

$$[D] = \frac{1}{1 - \nu_x \nu_y} \begin{bmatrix} E_x & E \nu_x & 0 \\ E \nu_x & E & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (5)$$

解析で使う三角形要素について、定ひずみ要素とすれば、変位関数 u, v, w を局所座標の一次関数のみで構成できる。よって、ひずみと変位の増分関係式として式(6)が得られ、係数マトリックス $[B]$ が節点変位 $\{\delta\}$ に関する線形部分と非線形部分で構成され、非常に煩雑の式となる。

$$d\{\epsilon\} = [B] d\{\delta\} \quad (6)$$

これらの異方性や非線形性の基づく式を用いて、仮想仕事の原理を三角形要素に適用すれば、式(7)の有限要素法非線形方程式が得られる。

$$[T]^T ([K_g] + [K_e]) [T] \cdot d\{\delta\} = d\{F\} \quad (7)$$

ここの $[T]$ は座標変換マトリックス、 $d\{\delta\}$ と $d\{F\}$ は全体座標における節点変位と節点外力の増分、 $[K_g]$ は幾何剛性マトリックス、 $[K_e]$ は弾性剛性マトリックスとなる。本論文では、この増分方程式にニュートンラフソンを適用して、各ステップにおける節点の不釣り合い力が十分小さくなるまで繰り返し増分解析を行った。

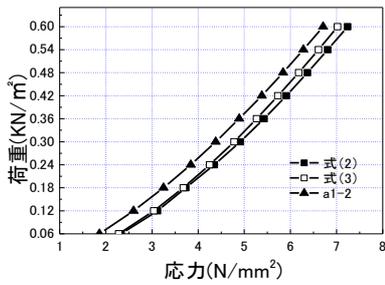


図1 設計式との比較

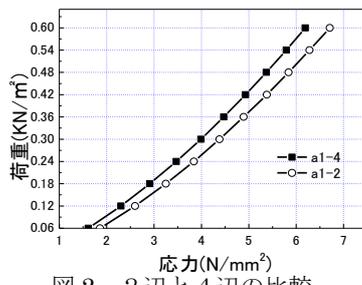


図2 2辺と4辺の比較

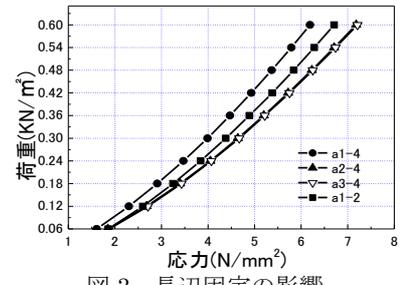


図3 長辺固定の影響

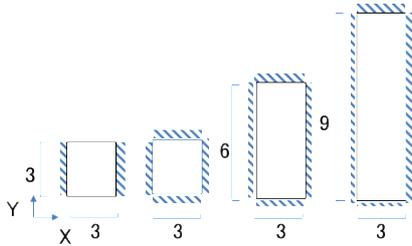


図4 形状モデル

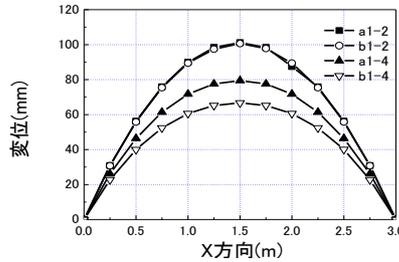


図5 中央断面の変位の比較

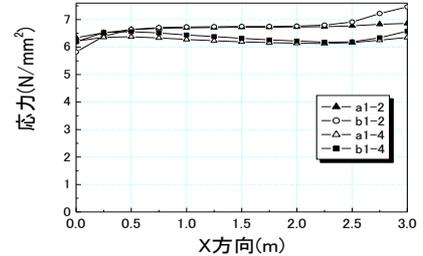


図6 中央断面の応力の比較

表2 最大応力・変位における解析値と設計式計算値の比較

表1 解析モデル

| | 異方性材料 | 等方性材料 |
|--------------|-----------|-----------|
| 2辺固定 | a1-2 | b1-2 |
| 4辺固定 (比率) | a1-4(1:1) | b1-4(1:1) |
| | a2-4(1:2) | b2-4(1:2) |
| | a3-4(1:3) | b3-4(1:3) |

| | | a1-2 | b1-2 | a1-4 | b1-4 |
|----------------------------|---------|-------|------|------|------|
| 変位 (mm) | 設計式(二次) | 109.3 | | | |
| | 設計式(三角) | 113.3 | | | |
| | 解析値 | 101.2 | 92.2 | 79.4 | 65.4 |
| 応力 (N/mm ²) | 設計式(二次) | 7.24 | | | |
| | 設計式(三角) | 7.02 | | | |
| | 解析値 | 6.71 | 6.74 | 6.38 | 6.15 |

4.解析モデル

膜材料の曲面に風荷重が作用した場合について応力・変形解析を行う。解析モデルの形状は図4の示す異方性材料と等方性材料の違いを加えた8個の解析モデルになる。ここでのパラメータとして設定したのは2辺固定と4辺固定の境界条件である。4辺固定では隣接する2辺の長さの比を正方形の1:1から長方形の1:2と1:3に変化させた。境界条件について、節点の回転変位は扱っていないので、両端の2辺を各節点の3軸方向変形を拘束して、内部の節点を自由とした2辺固定と、外周の全て節点の3軸方向の変位を拘束し内部の節点は自由とした4辺固定となる。荷重条件として風荷重を想定し、実際に文献3でも用いられている鉛直上向き0.6kN/m²の等分布荷重に対して行う。膜材の材料定数はヤング係数が縦糸1744N/mm²、横糸996N/mm²とし、ポアソン比が縦糸0.66、横糸0.38とし、せん断弾性係数が縦糸、横糸共に63.5N/mm²とする。初期張力として、縦糸方向、横糸方向ともに1kN/mを導入する。要素分割は三角形要素を用いる。

5.解析結果及び考察

この結果から、図1では解析値と設計式の比較を示した。変位は式(3)より式(2)の方が誤差が少ないと言える。図1の応力では式(3)の方が誤差が9%になる。現行の計算式のほか、より高い精度を求めて二次関数の代わりに三角関数を用いた計算式を使用した方が精度が良くなる。図2では中央断面の異方性と等方性の変位を比較した。材料定数の影響に

より9.4%の差がある。図3では指示条件と形状の違いによる影響を示し長辺を長くしても荷重条件と材料定数が同じであれば影響がない。

6.まとめ

本論文では、非線形有限要素法を用いた数値解析によって求めた応力と変位を利用して、既存の設計式で求められる値と比較した。比較に使う設計値はそれぞれ二次関数と三角関数に基づく既存の設計式で算出したものである。比較の結果、次のことがわかった。

(1)二次関数の代わりに三角関数を用いた設計式が精度の高い応力算出できその差が1割程度であることがわかった。

(2)二辺固定でも四辺固定でも固定端近くでは応力に誤差が大きくなるが最大応力に対しては精度よく求められる。

(3)数値解析結果との比較において等方性膜のモデルより異方性膜の方では誤差が小さくなる傾向が見られたが、中央部でその差が1割程度となる。

参考文献

- (1) 南宏和：「膜構造物設計における膜の弾性理論」,1998年日刊工業新聞社
- (2) 石井一夫：「膜構造の応力・変形解析概説」,1996年工業調査会
- (3) 国土交通省国土技術政策総合研究所：「膜構造の建築物・膜材料等の技術基準及び同解説」,2003年,海文堂

(林研究室)